LÖSUNGEN VEKTORRÄUME

Aufgabe 1:

Behauptung: Es sind $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig.

Beweis:

IA: Es ist $w_1 = v_1$. Es muss $v_1 \neq 0_V$ sein, da sonst $v_1, \dots, v_n$ nicht lin. unabh. wären.
Also ist v_1 linear unabhängig.

IV: Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass die Behauptung für dieses n gelte.

IS: Wir wollen zeigen, dass $w_1, \dots, w_{n+1}$ linear unabhängig sind.
Seien dazu dann $v_1, \dots, v_{n+1}$ lin. unabh.
Wir wissen nach der IV, dass $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig sind. Angenommen $w_1, \dots, w_{n+1}$ sind lin. abhängig. (Dann muss die lin. Abh. mit w_{n+1} zusammenhängen) und wir können mit Lemma IX.13 aus der VL w_{n+1} als Linearkombination der $w_1, \dots, w_n$ schreiben. Dh. es ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ so, dass $w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ gilt. Dann gilt aber wegen:

$$w_{n+1} = v_1 + \dots + v_{n+1} = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$$
$$= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 (v_1 + v_2) + \dots + \lambda_n (v_1 + \dots + v_n)$$
$$= v_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) + \dots + v_n(\lambda_n).$$

$$\Leftrightarrow \quad v_{n+1} = v_1(\lambda_1 + \dots + \lambda_n - 1) + \dots + v_n(\lambda_n - 1)$$

dass v_{n+1} als LK der $v_1, \dots, v_n$ darstellbar ist, was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt, dass $v_1, \dots, v_{n+1}$ lin. unabh. sind (mit Anwendung Lemma IX.13)
Daraus folgt, dass $w_1, \dots, w_{n+1}$ lin. unabh. sind.

Aufgabe 2:

Behauptung: (a) M ist lin. unabh. über $\mathbb{R}$.

(b) Es ist $\{[-1,2,0,0]^T, [-2,0,3,1]^T, [1,0,3,3]^T\}$ ebenfalls lin. unabh. über $\mathbb{R}$.

(c) Es gilt: $\mathbb{R}^4 = \operatorname{span}(M) \oplus \operatorname{span}([1,0,0,0]^T)$.

Beweis: (a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gilt.

Dann gelten:
$$\text{I}: -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$\text{II}: 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$\text{III}: 3\lambda_3 = 0$$
$$\text{IV}: \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0.$$

Aus III folgt, dass $\lambda_3 = 0$ gilt, sodass in IV $\lambda_2 = 0$ folgt und somit auch in II $\lambda_1 = 0$ gilt.
Dh. M ist lin. unabh. über $\mathbb{R}$.

b) Es ist $[-2,0,3,1] = 1\cdot[-1,2,0,0] + (-2)\cdot[1,1,0,1] + 1\cdot[1,0,3,3]$. (2)

Der Beweis des Austauschlemmas liefert uns nun, dass $\operatorname{span}\{[-2,0,3,1]^T, [-1,2,0,0]^T, [1,0,3,3]^T\}$
$= \operatorname{span}\{[-1,2,0,0]^T, [1,1,0,1]^T, [1,0,3,3]^T\}$ gilt
und die Menge $\{[-2,0,3,1]^T, [-1,2,0,0]^T, [1,0,3,3]^T\}$
ebenfalls lin. unabh. über $\mathbb{R}$ ist, denn es sind beides Erzeugnisse von 3-el. Mengen, die dasselbe erzeugen, sodass mit Lemma IX.24 nun noch die lineare Unabhängigkeit von $[-2,0,3,1]^T, [-1,2,0,0]^T, [1,0,3,3]^T$ folgt ...

c) Wir betrachten zunächst $\operatorname{span}(M) \cap \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right)$:

Sei dazu u aus diesem Durchschnitt.
Dann ex. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\alpha_1\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\0\\3\\3\end{pmatrix} = u = \alpha_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

gilt. Damit entstehen die 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}&: -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0\\
\mathrm{II}&: 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0\\
\mathrm{III}&: 3\alpha_3 = 0\\
\mathrm{IV}&: \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0
\end{aligned}$$

Es folgt wieder $\alpha_3 = 0$, dann $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$ und mit I auch $\alpha_4 = 0$, also ist $u = 0_{\mathbb{R}^4}$, sodass
$\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{span}(M) \cap \operatorname{span}([1,0,0,0]^T)) = 0$ gilt.
Mit $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{span}(M)) + \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{span}([1,0,0,0]^T)) - \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{span}(M) \cap \operatorname{span}([1,0,0,0]^T))$
$= \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{span}(M) + \operatorname{span}([1,0,0,0]^T))$ (IX.32)
folgt deshalb

(*) $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{span}(M) \oplus \operatorname{span}([1,0,0,0]^T)) = \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{span}(M)) + \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{span}([1,0,0,0]^T))$

Es gilt $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{span}([1,0,0,0]^T)) = 1$.
Um die Dimension von $\operatorname{span}(M)$ anzugeben, betrachten wir:

$$\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&1&0\\0&0&3\\0&1&3\end{pmatrix} \xrightarrow{G_{1,2}(2)} \begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&2\\0&0&3\\0&1&3\end{pmatrix} \xrightarrow{P_{3,4}} \begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&2\\0&1&3\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{G_{2,3}(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&2\\0&0&\frac{7}{3}\\0&0&3\end{pmatrix} \xrightarrow{G_{3,4}(-\frac{9}{7})} \begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&2\\0&0&\frac{7}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass somit $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{span}(M)) = 3$ gilt und mit (*) gilt nun $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{span}(M) \oplus \operatorname{span}([1,0,0,0]^T)) = 3 + 1 = 4 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$,
also $\mathbb{R}^4 = \operatorname{span}(M) \oplus \operatorname{span}([1,0,0,0]^T)$.

Aufgabe 4:

a)

Beh: Es ist $U \cap W = \text{span}([0,1,0]^T)$

und $U + W = \mathbb{R}^3$.

Bew: Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}.$$

Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} I:&\quad a = 0 \\ II:&\quad a - b + c = 0 \\ III:&\quad -c - 2d = 0 \end{aligned}$$

und somit $c = -2d$, damit $0 = -b + c = -b - 2d \Leftrightarrow b = -2d$ und $a = 0$ in I.

Damit erhalten wir $0 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - 2d \cdot \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2d\\0\end{bmatrix} = d \cdot \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$.

Dh. $U \cap W = \text{span}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$.

Im $\text{span}([1,1,0]^T, [0,-1,0]^T)$ liegt $[0,1,0]^T$ und $[1,0,0]^T$.

Im $\text{span}([0,-1,1]^T, [0,0,2]^T)$ liegt $[0,1,0]^T$ und $[0,0,1]^T$.

Also ist $U + W = \mathbb{R}^3 = \text{span}([1,0,0]^T, [0,1,0]^T, [0,0,1]^T)$.

(b) Beh: M ist ein K-Unterraum von V und $\dim_K(M) = 2$.

Bew: Es ist $M \subseteq V$ und $0 - 0 = 0$, also $0_V \in M$.

seien $[a,b,c]^T, [d,e,f]^T \in M$.

Es ist $[a,b,c]^T + [d,e,f]^T = [a+d, b+e, c+f]^T$

und $a+d-(c+f) = (a-c)+(d-f) = 0 + 0 = 0$,

also $[a,b,c]^T + [d,e,f]^T \in M$.

Sei nun $\lambda \in K$.

Dann gilt: $\lambda \cdot [a,b,c]^T = [\lambda a, \lambda b, \lambda c]^T$

und $\lambda a - \lambda c = \lambda(a-c) = \lambda \cdot 0 = 0$ und damit $\lambda \cdot [a,b,c]^T \in M$,

also ist $M \leq_K V$.

Außerdem ist $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ eine Basis für M, also M 2-dimensional.

A5: X Es ist $\underbrace{\{[1,-2,0]^T, [1,1,-2]^T, [0,1,1]^T\}}_{=:M}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$

Beweis:

Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$a\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Dann gelten: $I: a+b=0 \iff a=-b$

$II: -2a+b+c=0 \iff -2(-b)+b+2b=5b=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow a=c=0$

$III: -2b+c=0 \iff c=2b$

Daraus folgt, dass M ein lin. unabh. System ist und mit Korollar IX.22 folgt wegen $|M|=3$, dass M eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist

X Es ist $L\setminus\{v\}\cup\{u\}$ lin. unabh. über K.

Beweis: Es ist $u\notin \text{span}(L)$, also auch $u\notin\text{span}(L\setminus\{v\})$.
Weiterhin ist L linear unabh. Ang., $L\setminus\{v\}\cup\{u\}$ ist lin. abh., dann würde die lineare Abhängigkeit durch u zustande kommen. D.h. u müsste als LK von $L\setminus\{v\}$ darstellbar sein mit Lemma IX.13.
Das ist aber ein Widerspruch zu $u\notin\text{span}(L\setminus\{v\})$.
Also ist $L\setminus\{v\}\cup\{u\}$ lin. unabh. über K.

· Es gilt $0\le \dim(U_1\cap U_2)\le \min(m_1,m_2)$
und $\max(m_1,m_2)\le\dim(U_1+U_2)\le\dim(V)$
mit Serie 19, Aufgabe 2(b).
(z.B. ist in A $\dim(U+W)=3\ge\max(2,2)=2$ wobei $\dim(U)=2=\dim(W)$)

· Es ist $\{[1,0,0]^T,[0,1,0]^T,[0,0,1]^T\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}^3$, sodass mit Kor. IX.22 folgt, dass alle Basen des $\mathbb{R}^3$ 3-elementig sein müssen.

· Es ist $\{[1,0,0]^T,[2,0,0]^T,[3,0,0]^T\}$ eine 3-elementige Menge im $\mathbb{R}^3$, aber ein lin. abh. System, also keine Basis.

X Ang. $\lambda\cdot v\in B$ und $v\in B$, für $\lambda\in K$, $\lambda\neq 1_K$. Dann ist v aber eine LK von λv und B somit linear abh. mit Lemma IX.13, was einen Widerspruch zur Basis-Eigenschaft von B darstellt.

· 0_V liegt in keiner Basis von V.

· M aus A2(a) ist eine 3-elementige, lin. unabh. Menge des $\mathbb{R}^4$, aber keine Basis.

· Es ist $\{[1,0]^T,[0,1]^T,[1,1]^T\}$ ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}^2$, aber nicht lin. unabh.

Aufgabe 3:

(a) Beh: Es ist U ein Unterraum von V bezgl. $\mathbb{R}$.

Beweis: Wir wenden das Unterraumkriterium an:

- Es ist $U \subseteq V$ per Definition und $0_V^H = \overline{0_V}^T = 0_V = 0_V$, also $0_V \in U$.
- Seien $A, B \in U$. Dann gilt laut Vorlesung:
  $(A+B)^H = A^H + B^H = A + B \Rightarrow A+B \in U$
- Sei $A \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (dh. $\bar{\lambda} = \lambda$). Dann gilt:
  $(\lambda A)^H = \bar{\lambda} A^H = \lambda A \Rightarrow \lambda A \in U$

(b) Beh: B ist ein Erzsystem von U.

Beweis: Wir überlegen uns, wie eine Matrix aussehen muss, für die $A^H = A$ gilt.

Mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ist:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^H = \bar{A}^T = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix}$$

Auf der Hauptdiagonalen gilt $a = \bar{a}$, $d = \bar{d}$. Dh. $a, d \in \mathbb{R}$.

Für die Nebendiagonalelemente muss $b = \bar{c}$ gelten.

Dh. es muss $x, y \in \mathbb{R}$ geben so, dass

$b = x + yi$, $c = x - yi$.

Dann gilt:

$$A = \begin{bmatrix} a & x+yi \\ x-yi & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sqrt{2}\, x \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \sqrt{2}\, y \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

Dh. B ist ein Erz.system für U.

(c) Laut VL ist die orthogonale Projektion von A auf U, wenn $B = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ eine ONB ist, gleich

$$P_U(A) = \langle A, B_1 \rangle B_1 + \langle A, B_2 \rangle B_2 + \langle A, B_3 \rangle B_3 + \langle A, B_4 \rangle B_4$$

$$= 1 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + \sqrt{2}\, B_3 + 0 \cdot B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

Lineare Abbildungen

1. Aufgabe:

Kreuze an, ob es sich um eine lineare Abbildung handelt oder nicht. Entscheide außerdem, ob ein Mono-, Epi-, Iso-, Endo- oder Automorphismus vorliegt.

	keine lin. Abbildung	lineare Abbildung					
		Monomorphismus	Epimorphismus	Isomorphismus	Endomorphismus	Automorphismus	ohne weitere Eig.schaften
$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ geg. durch: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$	⊠	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ geg. durch: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$	☐	☐	⊠	☐	☐	☐	☐
$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ geg. durch: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 2x_1 + x_3 \\ 2x_3^3 \end{bmatrix}$	⊠	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ geg. durch: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 0 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$	☐	☐	☐	☐	⊠	☐	☐
$f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ geg. durch: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ x_3 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$	☐	⊠	⊠	⊠	⊠	⊠	☐
$f_6 : V \to W$ geg. durch: $\forall v \in V : f_6(v) = 0_W$ $(V \neq \{0_V\}, W \neq \{0_W\})$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	⊠
$\Phi_B : V \to K^4$, wobei V ein 4-dimensionaler K-VR ist und B geordnete Basis von V.	☐	⊠	⊠	⊠	☐	☐	☐
$f_7 : \mathbb{R}^{3,4} \to \mathbb{R}^3$ geg. durch: $A \mapsto [A]_{:,4}$	☐	☐	⊠	☐	☐	☐	☐

2. Aufgabe:

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind! Begründe kurz! **Lösung:**

- Sind die Vektorräume V und W isomorph, so ist jede lineare Abbildung von V nach W ein Isomorphismus.

  Im Allgemeinen falsch. Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch.
  Gegenbeispiel: $V = W = \mathbb{R}^3, f([x,y,z]^\top) = [0,0,0]^\top$.

- Ist $f \in L(V,W)$ ein Monomorphismus, so ist f auch ein Epimorphismus.

  Im Allgemeinen falsch. Sind die Dimensionen von V und W verschieden, so ist diese Aussage immer falsch. Sind die Dimensionen gleich, so ist die Aussage richtig.

- Ist $\dim(V) < \dim(W)$, so ist jede lineare Abbildung von V nach W injektiv.

  Im Allgemeinen falsch.
  Gegenbeispiel: Sei $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3$ und $f : V \to W$ gegeben durch $f(v) = 0_W$ für alle $v \in V$. Dann ist f nicht injektiv.

- Ist $\dim(V) > \dim(W)$, so ist jede lineare Abbildung von V nach W surjektiv.

  Im Allgemeinen falsch.
  Gegenbeispiel: Sei $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$ und $f : V \to W$ gegeben durch $f(v) = 0_W$ für alle $v \in V$. Dann ist f nicht surjektiv.

- Ist $\dim(V) > \dim(W)$, so gibt es keinen Monomorphismus von V nach W.

  Richtig. Angenommen, es würde einen Monomorphismus geben. Dann ist die Dimension des Kerns gleich 0. Nach Dimensionsformel wären dann die Dimensionen von V und W gleich groß, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

  der Dimension von V und

- Jeder Monomorphismus von V nach V ist auch ein Epimorphismus.

  Richtig. Dies folgt aus der Dimensionsformel. Ist $f : V \to V$ ein Monomorphismus, so ist dim Ker$(f) = 0$ und damit folgt $\dim(V)$ =dim(Im(f)). Somit ist V =Im(f) und f ist surjektiv, also ein Epimorphismus.

- Sei $\dim(V) = \dim(W)$. Dann gilt: $\mathrm{Ker}(f) = \{0_V\} \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = W$.

  Richtig. Dies folgt aus der Dimensionsformel. Ist dim $\mathrm{Ker}(f) = 0$, so muss nach Dimensionsformel dim Im(f) =dim(V) =dim(W) sein. Also ist W =Im(f).

- Sei $A \in K^{n,m}$. Dann gilt: Ist f_A ein Epimorphismus, so gilt $\mathrm{span}\{a_1, ..., a_m\} = K^m$.

  Im Allgemeinen falsch. Ist F_A ein Epimorphismus, so gilt $\mathrm{span}\{a_1, ..., a_m\} = K^n$.

- Ist f_A ein Monomorphismus, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ genau eine Lösung.

  Richtig. Ist f_A ein Monomorphismus, also injektiv, dann gibt es nur ein x, das auf den Nullvektor abgebildet wird (nämlich der Nullvektor aus der Startmenge). Folglich hat das angegebene Gleichungssystem nur eine Lösung.

- Ist $B_1 := (b_1, b_2, b_3)$ eine K-Basis des Vektorraumes V und $B_2 := (b_1+b_1, b_2+b_2, b_3+b_3)$ ebenfalls, dann gilt für die darstellenden Matrizen eines Endomorphismus $f \in L(V,V)$: $[f]_{B_2,B_2} = [f]_{B_1,B_1} + [f]_{B_1,B_1}$.

  Falsch. Seien $x_i, y_i, z_i \in K$ so, dass für alle $i \in \{1,2,3\}$ gilt: $f(b_i) = x_i b_1 + y_i b_2 + z_i b_3$. Dann hat die i-te Spalte von $[f]_{B_1,B_1}$ die Einträge x_i, y_i, z_i. Weiter ist $f(b_i + b_i) = f(b_i) + f(b_i) = x_i(b_1 + b_1) + y_i(b_2 + b_2) + z_i(b_3 + b_3)$. Folglich hat die i-te Spalte von $[f]_{B_2,B_2}$ die Einträge x_i, y_i, z_i. Somit ist $[f]_{B_2,B_2} = [f]_{B_1,B_1}$ und die Behauptung ist falsch.

3. Aufgabe:

Gegeben seien der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathbb{R}^3$ und die Vektoren $v_1 := [1,0,2]^\top, v_2 = [0,1,1]^\top, v_3 = [0,0,-1]^\top$. Weiter sei die lineare Abbildung $f : V \to V$ gegeben durch:

$$f(v_1) = [2,0,4]^\top, f(v_2) = [0,1,2]^\top, f(v_3) = [0,-2,-4]^\top$$

a) Berechne $f([1,2,3]^\top)$.

b) Sei $B_1 := (v_1, v_2, v_3)$. Bestimme die darstellende Matrix $[f]_{B_1,B_1}$. Bestimme anschließend $\dim(\mathrm{Im}(f))$. Untersuche, ob f surjektiv/injektiv ist.

c) Sei B die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Bestimme die darstellende Matrix $[f]_{B,B}$ von f bezüglich B.

d) Gib ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge $\mathrm{Ker}(f)$ ist, und löse es mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Gib eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$ an!

e) Sei B_1 wie in b). Weiter sei $v \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Koordinaten bezüglich B_1:

$$\Phi_{B_1}(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Berechne v und $f(v)$.

Lösung:

a) Es ist

$$\begin{aligned} f([1,2,3]^\top) &= f([1,0,2]^\top + 2 \cdot [0,1,1]^\top + [0,0,-1]^\top) \\ &= f([1,0,2]^\top) + 2f(+2 \cdot [0,1,1]^\top) + f([0,0,-1]^\top) \\ &= [2,0,4]^\top + 2 \cdot [0,1,2]^\top + [0,-2,-4]^\top \\ &= [2,0,4]^\top \end{aligned}$$

b) Es ist

$$f(v_1) = 2 \cdot v_1,\ \ f(v_2) = v_2 - v_3,\ \ f(v_3) = -2v_2 + 2v_3$$

Somit ist: $[f]_{B_1,B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

c) Nach Satz X.28 (Basiswechsel) gilt:

$$[f]_{B,B} = [id_V]_{B_1,B} \cdot [f]_{B_1,B_1} \cdot [id_V]_{B,B_1}$$

Die Spalten der Matrix $[id_V]_{B_1,B}$ sind die Basisvektoren v_1, v_2, v_3, also:

$$[id_V]_{B_1,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Um die Matrix $[id_V]_{B,B_1}$ zu bestimmen, kann man entweder die Inverse von $[id_V]_{B_1,B}$ bestimmen oder die Standardbasisvektoren als Linearkombination mit den Vektoren aus B_1 darstellen. Letzter Variante liefert:

$$[1,0,0]^\top = v_1 + 2v_3, [0,1,0]^\top = v_2 + v_3, [0,0,1]^\top = -v_3$$

Somit ist:

$$[id_V]_{B,B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} [f]_{B,B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Auch ohne Satz X.28 hätte man die Matrix auch "zu Fuß" ausrechnen können: Die Bilder der Standardbasisvektoren berechnen und diese Bilder in die Spalten schreiben.

d) Der Kern von f ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$[f]_{B,B} \cdot [x_1, x_2, x_3]^\top = [0,0,0]^\top$$

Löst man dieses Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus (Lösungsweg wird in dieser Lösung ausgelassen), so erhält man: $\mathrm{Ker}(f) = \{[0, 2x_3, x_3]^\top \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$.

e) Es ist $v = v_1 - 2v_3 = [1,0,4]^\top$ und

$$f(v) = f(v_1) - 2f(v_3) = [2,0,4]^\top - 2[0,-2,-4]^\top = [2,4,12]^\top$$

Man hätte auch rechnen können: $[f]_{B,B} \cdot [1,0,4]^\top$.

4. Aufgabe:

Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit der geordneten Basis $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$. Die lineare Abbildung $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ sei gegeben durch: $f(b_1) = b_1 + b_2, f(b_2) = 3b_2, f(b_3) = b_1 - 2b_4, f(b_4) = b_3$. Zeige, dass f eine Umkehrabbildung f^{-1} besitzt und bestimme eine darstellende Matrix von f^{-1}.

Lösung: Es ist

$$[f]_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Entwickeln nach der vierten Spalte liefert: $\det[f]_{B,B} = -(-6) = 6$ Somit ist die Matrix invertierbar und damit auch die zugehörige Abbildung. Es gilt

$$[f^{-1}]_{B,B} = [f]_{B,B}^{-1}$$

Die Berechnung der Inversen wird in dieser Lösung ausgelassen. Man erhält:

$$[f^{-1}]_{B,B} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Linear- und Bilinearformen Lösungen

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $v, w, x \in V := \mathbb{R}^n$. Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit dem Standardskalarprodukt.
Sei die Relation $\sim$ auf V gegeben durch

$$v \sim w \Leftrightarrow \text{ Es existiert ein } Q \in O(n) \text{ mit } v = Qw.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V definiert.

Lösung:
reflexiv: Sei $A = I_n$ die Einheitsmatrix der Dimension $n \times n$. Es ist $f_A = id_V$ und $\langle id_V(v), id_V(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ und damit ist $A \in O(n)$. Nun ist $v = I_n v = Av$ und damit $v \sim v$.

symmetrisch: Angenommen, es ist $v \sim w$, dann existiert ein $Q \in O(n)$ mit $v = Qw$. Da $O(n)$ mit Korollar XII.48 eine Gruppe ist, ist Q invertierbar und $Q^{-1} \in O(n)$. Somit ist $Q^{-1}v = w$ und damit $w \sim v$.

transitiv: Seien $v \sim w$ und $w \sim x$. Dann existieren $Q_1, Q_2 \in O(n)$ mit $v = Q_1 w$ und $w = Q_2 x$. Damit ist $v = Q_1 w = Q_1 Q_2 x$. Da $O(n)$ eine Gruppe ist, ist auch $Q_3 := Q_1 Q_2 \in O(n)$. Damit ist $v = Q_3 x$ und es folgt $v \sim x$.

2. Aufgabe:

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist. Was ist die darstellende Matrix von der Bilinearform bezüglich der Standardbasis?

b) Sei $\| \cdot \|$ die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erzeugte Norm. Berechnen Sie $\|a\|$ für $a = [-2, 3]^T$.

c) Sei $V := (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Berechnen Sie mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine ONB zu der Basis $(v_1, v_2) = (e_1, e_1 - e_2)$ von V.

Lösung:

a) Ein Skalarprodukt ist eine symmetrische Bilinearform, die positiv definit ist. Um zu sehen, dass es sich um eine Bilinearform handelt, definiere die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Dann ist $\langle x, y \rangle = x^T A y$ und somit erhalten wir mit Beispiel XII.2 aus der Vorlesung eine Bilinearform mit darstellender Matrix A.

symmetrisch: Wenn man die darstellende Matrix A der Bilinearform gefunden hat, reicht es zu überprüfen, dass A symmetrisch ist. In unserem ist $A^T = A$ und damit A symmetrisch.
Mann kann es auch zu Fußnachrechnen:

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 = y_1x_1 + 2y_1x_2 + 2y_2x_1 + 5y_2x_2 = \langle y, x\rangle.$$

positiv definit: Auch hier kann man überprüfen, ob A positiv definit ist oder es direkt an der Bilinearform zeigen.
Es ist $\langle x, x\rangle = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$.
Falls $\langle x, x\rangle = 0$ ist $(x_1 + 2x_2)^2 = 0$ und $(x_2)^2 = 0$. Es folgt $x_2 = 0$ und somit auch $x_1 = x_1 + 2x_2 = 0$.
Damit ist $x = 0$.

b) Mit a) ist $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2}$. Damit ist $\|a\| = \sqrt{4 - 24 + 45} = \sqrt{25} = 5$.

c)

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{1}} = v_1$$

$$\textbf{j=1:} \quad \hat{u}_2 = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 = v_2 - (1-2)u_1 = v_2 + u_1 = v_2 + v_1 = 2e_1 - e_2$$
$$u_2 = \frac{\hat{u}_2}{\|\hat{u}_2\|} = \frac{\hat{u}_2}{\sqrt{4-8+5}} = \hat{u}_2 = 2e_1 - e_2.$$

Somit ist $B = (u_1, u_2)$ eine ONB zu $\mathbb{R}^2$ mit

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. Aufgabe:

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Sei der Unterraum

$$U = \operatorname{span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$$

gegeben. Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine ONB von U ohne vorher zu testen, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

Lösung:

1. v_1 wird normiert
$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{3} = \frac{1}{3}[-1, 2, 2, 0]^\top$$

2. Wir rechnen erst einen Vektor aus, der orthogonal zu v_1 ist und normieren ihn dann
$$\overline{u}_2 = v_2 - \langle v_2, u_1\rangle\, u_1 = v_2 - 0 \cdot u_1$$
$$u_2 = \frac{\overline{u}_2}{\|\overline{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}[0, -1, 1, 1]^\top$$

3. Wir rechnen erst einen Vektor aus der orthogonal zu u_1 und u_2 ist

$$\overline{u}_3 = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle \, u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle \, u_2$$
$$= [-1, 1, 3, 1]^\top - 3 \cdot \frac{1}{3}[-1, 2, 2, 0]^\top - \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}[0, -1, 1, 1]^\top = [0, 0, 0, 0]^\top$$

   Das bedeutet, dass v_3 eine Linearkombination von v_1, v_2 ist und für die Ermittlung einer Basis gestrichen werden kann.

4. Wir wenden nun das Gram-Schmidt-Verfahren auf v_4 an

$$\overline{u}_4 = v_4 - \langle v_4, u_1 \rangle \, u_1 - \langle v_4, u_2 \rangle \, u_2$$
$$= [-3, 3, 0, -3]^\top - 3 \cdot 13 \cdot [-1, 2, 2, 0]^\top - \frac{(-6)}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot [0, -1, 1, 1]^\top = [-2, -1, 0, -1]^\top$$
$$u_4 = \frac{\overline{u}_4}{\|\overline{u}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}[-2, -1, 0, -1]^\top$$

Also ist eine ONB von U

$$B = (u_1, u_2, u_4) = \left(\begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 0 \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right)$$

4. Aufgabe :

Es seien $K = \mathbb{R}$ und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Weiter sei $\alpha : V \to K$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $v \in V$ und $\lambda \in K$ gelte $\alpha(\lambda v) = |\lambda|\alpha(v)$.

(ii) Für alle $v_1, v_2 \in V$ gelte $\alpha(v_1 + v_2) \leq \alpha(v_1) + \alpha(v_2)$.

(Die Abbildung α heißt dann eine *Halbnorm* auf V.)
Zeigen Sie

a) Für alle $v \in V$ ist $\alpha(v) \geq 0$.

b) $U := \{v \mid v \in V,\ \alpha(v) = 0\}$ ist ein Unterraum von V.

c) Für $v + U \in V/U$ definiere $\|v + U\| := \alpha(v)$, so ist $\| \cdot \|$ eine Norm auf V/U.

Lösung:

a) Sei $v \in V$. Wegen (i) gilt $\alpha(0_V) = |0|\alpha(0_V) = 0$. Somit ist

$$0 = \alpha(0_V) = \alpha(v + (-v)) \leq \alpha(v) + \alpha(-v) = \alpha(v) + |-1|\alpha(v) = 2\alpha(v).$$

Es ist also $2\alpha(v) \geq 0$ und damit ist auch $\alpha(v) \geq 0$.

b) Wir wollen Lemma IX.5 anwenden. Es gilt offensichtlich $U \subset V$. Wie wir in a) schon gezeigt haben, ist $0_V \in U$.
Seien nun $u_1, u_2 \in U$, dann ist

$$\alpha(u_1 + u_2) \leq \alpha(u_1) + \alpha(u_2) = 0.$$

Da mit a) aber $\alpha(u_1 + u_2) \geq 0$ ist, folgt schon $\alpha(u_1 + u_2) = 0$. Somit ist $u_1 + u_2 \in U$.
Seien nun $\lambda \in K$ und $u \in U$. Dann ist

$$\alpha(\lambda u) = |\lambda|\alpha(u) = |\lambda| \cdot 0 = 0.$$

Somit ist auch $\lambda u \in U$ und U ist schließlich ein Unterraum von V.

c) Wir zeigen zunächst, dass $\|\cdot\|$ wohldefiniert ist. Seien dafür $v_1 + U = v_2 + U \in V/U$. Dann existiert ein $u \in U$ so, dass $v_1 + u = v_2$ ist. Dann ist

$$\|v_1 + U\| = \alpha(v_1) = \alpha(v_2 - u) \leq \alpha(v_2) + \alpha(-u) = \alpha(v_2) + \alpha(u) = \alpha(v_2) = \|v_2 + U\|.$$

Umgekehrt gilt

$$\|v_2 + U\| = \alpha(v_2) = \alpha(v_1 + u) \leq \alpha(v_1) + \alpha(u) = \alpha(v_1) = \|v_1 + U\|.$$

Somit ist also $\|v_2 + U\| = \|v_1 + U\|$ und $\|\cdot\|$ wohldefiniert.

Homogenität: Sei $v + U \in V/U$ und $\lambda \in K$, dann gilt

$$\|\lambda(v + U)\| = \|\lambda v + U\| = \alpha(\lambda v) \overset{\text{a)}}{=} |\lambda|\alpha(v) = |\lambda|\|v + U\|.$$

Definitheit: Sei $v + U \in V/U$, dann gilt $\|v + U\| = \alpha(v) \overset{\text{a)}}{\geq} 0$. Außerdem ist

$$0 = \|v + U\| = \alpha(v) \quad \Leftrightarrow \quad v \in U \quad \Leftrightarrow \quad v + U = 0_V + U = 0_{V/U}.$$

Dreiecksungleichung: Seien $v_1 + U, v_2 + U \in V/U$, dann gilt

$$\|v_1 + U + v_2 + U\| = \|v_1 + v_2 + U\| = \alpha(v_1 + v_2) \overset{\text{(ii)}}{\leq} \alpha(v_1) + \alpha(v_2) = \|v_1 + U\| + \|v_2 + U\|.$$

5. Aufgabe:

Gegeben seien die Basen $B = (v_1, v_2, v_3)$ und $C = (w_1, w_2, w_3)$ des 3-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{R}^3$ mit $w_1 = v_1,\ w_2 = v_2$ und

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. Berechnen Sie die zu B duale Basis B^*.
2. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert als $f([a_1, a_2, a_3]^T) = 2a_1 - a_3$. Schreiben Sie die Linearform f als Linearkombination bzgl. der Dualbasis B^*.
3. Untersuchen Sie, ob $v_1^* = w_1^*$ ist, indem sie v_1^* als eine Linearkombination bzgl. der Dualbasis C^* schreiben.

Lösung:

1. Sei $(v_1^*, v_2^*, v_3^*) = B^*$ und sei $a \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ so, dass gilt $a = [a_1, a_2, a_3]^T$. Dann gilt für die Standardbasis (e_1, e_2, e_3) von $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} a &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ &= a_1(-e_2 + e_2 + e_1) + a_2e_2 + a_3(e_3 + 2e_2 - e_1 + e_2 + e_1 - 3e_2) \\ &= -a_1e_2 + a_1(e_2 + e_1) + a_2e_2 + a_3(e_3 + 2e_2 - e_1) + a_3(e_2 + e_1) - 3a_3e_2 \\ &= -a_1v_1 + a_1v_2 + a_2v_1 + a_3v_3 + a_3v_2 - 3a_3v_1 \\ &= (-a_1 + a_2 - 3a_3)v_1 + (a_1 + a_3)v_2 + a_3v_3. \end{aligned}$$

   Wegen $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ gilt dann

$$\begin{aligned} v_1^*(a) &= v_1^*((-a_1 + a_2 - 3a_3)v_1 + (a_1 + a_3)v_2 + a_3v_3)) \\ &= (-a_1 + a_2 - 3a_3)v_1^*(v_1) + (a_1 + a_3)v_1^*(v_2) + a_3v_1^*(v_3) \\ &= -a_1 + a_2 - 3a_3 \\ v_2^*(a) &= a_1 + a_3 \\ v_3^*(a) &= a_3. \end{aligned}$$

2. $f(a) = 2a_1 - a_3 = 2(a_1 + a_3) - 3a_3 = 2v_2^*(a) - 3v_3^*(a)$ oder
   $f(v_1) = 0,\ f(v_2) = 2 - 0 = 2,\ f(v_3) = -2 - 1 = -3$ und wir erhalten die Koeffizienten in der Darstellung als Linearkombination von B^*.

3. Es gilt

$$\begin{aligned} a &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ &= a_1(e_1 + e_2 - e_2) + a_2e_2 + \frac{1}{2}a_3(2e_3) \\ &= a_1w_2 - a_1w_1 + a_2w_1 + \frac{1}{2}a_3w_3 \\ &= (-a_1 + a_2)w_1 + a_1w_2 + \frac{1}{2}a_3w_3 \end{aligned}$$

   Und damit ist

$$\begin{aligned} w_1^*(a) &= -a_1 + a_2 \\ w_2^*(a) &= a_1 \\ w_3^*(a) &= \frac{1}{2}a_3 \end{aligned}$$

Somit ist $v_1^* = w_1^* - 6w_3^*$

Eigenwerte
Lösungen

1. Aufgabe:

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Sei die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von f.

b) Begründen Sie, dass f diagonalisierbar ist.

c) Sei $B = (e_1, e_2)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und $A = [f]_{B,B}$. Geben Sie eine Matrix $S \in GL_2(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2,2}$ an, sodass

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1}.$$

d) Gibt es auch ein $S \in O(2)$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist?

e) Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von der Umkehrabbildung f^{-1} an, ohne f^{-1} auszurechnen.

Lösung:

a) Die darstellende Matrix bzgl. der Standardbasis

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

induziert f und hat somit die selben EW und EV. Die EW berechnen sich als Nullstellen von

$$p_f(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ 1 & \lambda - 4 \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - 8\lambda + 15$$

also $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 5$. Den Eigenraum zu $\lambda_1 = 3$ erhalten wir als Lösungsmenge von

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

also

$$Eig(3, f) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = v_2\}$$

Den Eigenraum zu $\lambda_2 = 5$ erhalten wir als Lösungsmenge von

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

also

$$Eig(5, f) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = -v_2\}$$

b) Da der Isomorphismus f über $\mathbb{R}^2$ zwei **verschiedene** EW hat, ist er nach XIII.27 diagonalisierbar.

c) Aus b) folgt, dass eine Basis aus Eigenvektoren des $\mathbb{R}^2$ existiert. z.B

$$B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

Nach XIII.26 ist

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

d) Die beiden EV bilden schon eine OB, da

$$\left\langle [1,1]^\top, [1,-1]^\top \right\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$$

Wenn wir sie normieren, bilden sie eine ONB und damit spaltenweise zusammengesetzt eine orthogonale Matrix

$$\left\| [1,1]^\top \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = \left\| [1,-1]^\top \right\| \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e) Wenn v ein EV von f zum EW λ ist, dann folgt

$$f(v) = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad v = f^{-1}(\lambda v) = \lambda f^{-1}(v) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda} v$$

Also ist dann v ein EV von f^{-1} zum EW $\frac{1}{\lambda}$. Für unser Beispiel hat f^{-1} also die Eigenwerte 1/3 und 1/5 mit

$$Eig(1/3, f^{-1}) = Eig(3, f) \qquad Eig(1/5, f^{-1}) = Eig(5, f)$$

2. Aufgabe:

Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar in $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$?

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & -24 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 3)^2$$

Damit hat A die EW $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 3$. Wir wissen $a(5, A) = 1 = g(5, A)$ Für den EW 3 mit $a(3, A) = 2$ berechnen wir mit

$$3I - A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und damit $g(3, A) = 3 - \text{Rang}(3I - A) = 3 - 1 = 2 = a(3, A)$. Damit ist A diagonalisierbar.

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$$

Das quadratische Polynom $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ hat die 2 komplexen Nullstellen $-1 + i$ und $-1 - i$. Damit ist B über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, da es komplexe Nullstellen hat. Über $\mathbb{C}$ hat es 3 verschiedene und ist daher diagonalisierbar.

$$p_C(\lambda) = (\lambda+2)^3$$

C hat also nur den Eigenwert $\lambda_1 = -2$ mit $a(-2, C) = 3$. Es gilt aber

$$-2I - A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 8 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und damit $g(-2, C) = 3 - \mathrm{Rang}(-2I - A) = 3 - 1 = 2$. Da die algebraische und geometrische Vielfachheit von -2 nicht übereinstimmen, ist C weder in $\mathbb{C}$ noch in $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

$$p_D(\lambda) = (\lambda+1)\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

D hat die 4 verschiedenen EW $-1, 0, 2, 3$ und ist damit diagonalisierbar.

3. Aufgabe:

Sei ein unitärer Vektorraum $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ gegeben. Folgern Sie jeweils mit dem Skalarprodukt:

a) Wenn $A^2 = A^H$, dann liegen die Eigenwerte von A in der Menge $\{0, 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

b) Wenn $A^2 = (A^H)^2$, dann sind alle Eigenwerte von A entweder rein imaginär oder rein reell.

Lösung: a) Sei λ ein EW von A zum EV v. Dann gilt

$$\lambda^2 \langle v, v\rangle = \left\langle \lambda^2 v, v\right\rangle = \left\langle A^2 v, v\right\rangle = \left\langle A^H v, v\right\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\,\langle v, v\rangle$$

Also $\lambda^2 = \overline{\lambda}$. Wenn wir $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$ dort einsetzen

$$\lambda^2 = (a+bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = \overline{\lambda} = a - bi$$

erhalten wir durch den Vergleich des Real- und Imaginärteils das nicht-lineare Gleichungssystem

$$a^2 - b^2 = a \qquad 2ab = -b$$

Die 4 Lösungen $a = b = 0$, $a = 1, b = 0$, $a = -1/2, b = \sqrt{3}/2$ und $a = -1/2, b = -\sqrt{3}/2$ liefern genau die Zahlen aus der Aufgabe.
b) Analog a) folgt hier, dass $\lambda^2 = \overline{\lambda}^2$ gelten muss. Also $(a+bi)^2 = (a-bi)^2$. Die Gleichung ist wahr, wenn $-2abi = +2abi$, also wenn $a = 0$ oder $b = 0$ und damit die EW rein imaginär oder rein reell sind.

4. Aufgabe:

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}[t]_{\leq 1} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 1}, \qquad (\alpha_1 t + \alpha_0) \mapsto (\alpha_1 - 2\alpha_0)t + (3\alpha_1 - 4\alpha_0)$$

a) Geben Sie die darstellende Matrix $[f]_{B,B}$ von f bzgl. der Standardbasis $B = (t, 1)$ des $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$ an.

b) Sei $B_1 = (t+1, 2t+3)$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}[t]_{\leq 1}$. Bestimmen Sie die Koordinatentransformations-Matrizen $[\mathrm{id}]_{B,B_1}$, $[\mathrm{id}]_{B_1,B}$ und damit $[f]_{B_1,B_1}$.

c) Ist f diagonalisierbar?

Lösung:

a) Wir berechnen die Bilder von B und stellen sie wieder als Linearkombination von B dar. So erhalten wir die Spalten der darstellenden Matrix

$$f(t) = (1-0)t + (3-0) = 1 \cdot t + 3 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$f(1) = (0-2)t + (0-4) = (-2) \cdot t + (-4) \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Damit ist

$$[f]_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

b) Für $[id]_{B_1,B}$ stellen wir die Elemente von B_1 als Linearkombination der Elemente aus B dar.

$$t+1 = 1 \cdot t + 1 \cdot 1, \qquad 2t+3 = 2 \cdot t + 3 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad [id]_{B_1,B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$[id]_{B,B_1}$ kann man analog berechnen (oder als inverse Matrix von $[id]_{B_1,B}$)

$$t = 3 \cdot (t+1) + (-1) \cdot (2t+3), \qquad 1 = (-2) \cdot (t+1) + 1 \cdot (2t+3) \quad \Rightarrow \quad [id]_{B,B_1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Laut Vorlesung berechnet sich die darstellende Matrix nach dem Basiswechsel zu

$$[f]_{B_1,B_1} = [id]_{B,B_1}[f]_{B,B}[id]_{B,B_1}^{-1} = [id]_{B,B_1}[f]_{B,B}[id]_{B_1,B}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

c) Ja, f ist diagonalisierbar, da es eine Basis gibt, sodass die darstellende Matrix Diagonalgestalt hat.

5. Aufgabe:

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Es gibt eine Isometrie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$T([0,0]^\top) = [1,0]^\top \qquad T([5,0]^\top) = [4,-4]^\top \qquad T([0,5]^\top) = [5,3]^\top$$

und der Abbildungsvorschrift $T(x) = Qx + q, Q \in O(2), q \in \mathbb{R}^2$. Aus den Eigenwerten von Q erkennt man, dass $f(x) = Qx$ eine Drehung definiert.

b) Wenn V ein Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung sind, sodass -1 ein Eigenwert von $f^2 + f$ ist, dann ist 1 ein Eigenwert von f^3

c) Die Menge

$$U = \left\{ f \in \text{Aut}(\mathbb{R}^2) \mid \ v = [1,1]^\top \text{ ist Eigenvektor von } f \right\}$$

ist eine Untergruppe von $\text{Aut}(\mathbb{R}^2)$ bzgl. der Hintereinanderausführung $\circ$.
Hinweis: $\text{Aut}(\mathbb{R}^2)$ ist die Menge aller Automorphismen auf $\mathbb{R}^2$.

d) Wenn $N = \mathbb{C}^{n,n} \backslash \{0\}$ nilpotent ist, d.h. $N^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist N nicht diagonalisierbar.

Lösung: a) Wir suchen eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{2,2}$ und einen Vektor $q \in \mathbb{R}^2$ mit

$$Q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

sodass sich genau die Bilder berechnen.

$$T([0,0]^\top) = Q \cdot 0 + q = [e,f]^\top = [1,0]^\top \quad \Rightarrow \quad e = 1, f = 0$$
$$T([5,0]^\top) = Q \cdot [5,0]^\top + [1,0]^\top = [5a+1, 5c]^\top \quad \Rightarrow \quad a = 3/5, c = -4/5$$
$$T([0,5]^\top) = Q[0,5]^\top + [1,0]^\top = [5b+1, 5d]^\top = [5,3]^\top \quad \Rightarrow \quad b = 4/5, d = 3/5$$

Also berechnet sich

$$Q = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wie sich leicht überprüfen lässt, ist $Q^\top Q = I_2$ und damit Q eine orthogonale Matrix. Es folgt, dass $T(x) = Qx + q$ eine Isometrie ist. Die Eigenwerte von Q berechnen sich zu

$$\frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}\mathrm{i}$$

Das muss also eine Drehung definieren, da eine Spiegelung laut Vorlesung nur die Eigenwerte 1 und -1 hat.
b) Wenn -1 ein EW von $f^2 + f$ ist, dann existiert ein $v \in V \backslash \{0\}$ mit

$$f^2(v) + f(v) = -v \quad \Leftrightarrow \quad f^2(v) = -v - f(v)$$

Setzt man dieses v in f^3 ein und nutzt die Linearität von f, ergibt sich

$$f^3(v) = f(f^2(v)) = f(-v - f(v)) = -f(v) - f^2(v) = -(f(v) + f^2(v)) = -(-v) = v$$

Also ist v ein EV von f^3 zum EW 1.
c) Es gilt

- $U \neq \emptyset$, da $id \in U$, und per Definition $U \subseteq Aut(\mathbb{R}^2)$
- Seien $f, g \in U$. Dann gibt es λ_1, λ_2 mit

  $$f([1,1]^\top) = \lambda_1 [1,1]^\top \qquad g([1,1]^\top) = \lambda_2 [1,1]^\top$$

  und für die Verknüpfung

  $$f(g([1,1]^\top)) = f(\lambda_2 [1,1]^\top) = \lambda_2 f([1,1]^\top) = \lambda_2 \lambda_1 [1,1]^\top$$

  Also ist $[1,1]^\top$ auch ein EV von $f \circ g$ und damit $f \circ g \in U$.
- Wie in Aufgabe 1 wiederholt wurde, folgt aus der Tatsache, dass $[1,1]^\top$ ein EV von f ist, auch dass er ein EV von f^{-1} ist. Damit ist für alle $f \in U$ auch $f^{-1} \in U$.

Nach der Untergruppenkriterium ist U eine Untergruppe.

d) Angenommen N ist diagonalisierbar. Dann existiert $S \in GL_n(\mathbb{C})$ und eine Diagonalmatrix D mit $N = SDS^{-1}$. Dann gilt aber

$$0 = N^m = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) \dots (SDS^{-1}) = SD^m S^{-1}$$

Wenn diese Gleichung von links mit S^{-1} und von rechts mit S multipliziere, bekomme ich $D^m = 0$. Die Multiplikation von den m Diagonalmatrizen ist wieder eine Diagonalmatrix mit Einträgen $d_{i,i}^m$ und die sollen alle Null sein. Daraus folgt sofort, dass D die Nullmatrix ist und somit auch N. Widerspruch.